# Übungen zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik I“ -Lösungsvorschlag-

1. Das Prinzip der vollständigen Induktion läßt sich beispielsweise folgendermaßen formulieren

*Ist $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Aussage, und gilt*

$$A(1) \quad \textit{sowie} \quad \forall n \geq 1 \ : \ [A(n) \implies A(n+1)]\,,$$

*so gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Um dieses Prinzip zum Beweis der behaupteten Gleichung anzuwenden, erklären wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Aussage $A(n)$ durch

$$A(n) \ : \quad \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k^2 = (-1)^{n+1} \ \frac{n(n+1)}{2}.$$

Der Induktionsbeweis läuft nun folgendermaßen ab:

**Induktionsanfang:** Sei $n = 0$. Dann ist $\sum_{k=1}^{1} (-1)^{k+1} k^2 = (-1)^{1+1} 1^2 = 1$,
und auch $(-1)^{1+1} \ \frac{1(1+1)}{2} = 1$.

**Induktionsschluß:** $n \to n+1$: Es sei $n \geq 0$ und es gelte

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k^2 = (-1)^{n+1} \ \tfrac{n(n+1)}{2} \qquad (\textbf{Induktionsvoraussetzung}).$$

Zu zeigen ist $$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} k^2 = (-1)^{n+2} \ \tfrac{(n+1)(n+2)}{2} \qquad (\textbf{Induktionsbehauptung}).$$

Es ist

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} k^2 &= \left( \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k^2 \right) + (-1)^{(n+1)+1} (n+1)^2 \\
&= (-1)^{n+1} \ \frac{n(n+1)}{2} + (-1)^{n+2} (n+1)^2 \qquad \text{(Induktionsvoraussetzung anwenden)} \\
&= (-1)^{n+2} \left( -\frac{n(n+1)}{2} \right) + (-1)^{n+2} (n+1)^2 \\
&= (-1)^{n+2} (n+1) \left( -\frac{n}{2} + n + 1 \right) = (-1)^{n+2} (n+1) \left( \frac{n}{2} + 1 \right) \\
&= (-1)^{n+2} (n+1) \left( \frac{n+2}{2} \right) = (-1)^{n+1} \ \frac{(n+1)(n+2)}{2},
\end{aligned}$$

und das war zu zeigen.

2. a) Wir zeigen die Aussage

$$\text{Für alle } n \in \mathbb{N}_0 \text{ gilt} \quad 6 \mid (2n^3 + 3n^2 + n)$$

mit vollständiger Induktion (nach $n$).

**Induktionsanfang:** Sei $n = 0$. Dann ist $2n^3 + 3n^2 + n = 0$ sicher durch 6 teilbar. ✓

**Induktionsschluß:** $n \to n+1$: Es sei $n \geq 0$ und es gelte

$$6|(2n^3 + 3n^2 + n) \qquad (\textbf{Induktionsvoraussetzung}).$$

$$\text{Zu zeigen:} \quad 6|[2(n+1)^3 + 3(n+1)^2 + (n+1)] \qquad (\textbf{Induktionsbehauptung}).$$

Es ist

$$\begin{aligned}
2(n+1)^3 + 3(n+1)^2 + (n+1) &= 2(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + 3(n^2 + 2n + 1) + n + 1 \\
&= 2n^3 + 6n^2 + 6n + 2 + 3n^2 + 6n + 3 + n + 1 \\
&= 2n^3 + 3n^2 + n + 6n^2 + 6n + 2 + 6n + 3 + 1 \\
&= 2n^3 + 3n^2 + n + 6n^2 + 12n + 6. \\
&= 2n^3 + 3n^2 + n + 6(n^2 + 2n + 1).
\end{aligned}$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt $6|(2n^3 + 3n^2 + n)$, und trivialerweise ist auch $6|6$, also gilt nach 5.8f), daß $6|[2n^3 + 3n^2 + n + 6(n^2 + 2n + 1)]$, also $6|[2(n+1)^3 + 3(n+1)^2 + (n+1)]$, und das war zu zeigen.

b) Wir zeigen die Aussage

$$\text{Für alle } n \in \mathbb{N}_0 \text{ gilt} \quad 8 \mid (3^{2n} + 7)$$

mit vollständiger Induktion (nach $n$).

**Induktionsanfang:** Sei $n = 0$. Dann ist $3^{2n} + 7 = 3^0 + 7 = 8$, und $8|8$. ✓

**Induktionsschluß:** $n \to n+1$: Es sei $n \geq 0$ und es gelte

$$8|(3^{2n} + 7) \qquad (\textbf{Induktionsvoraussetzung}).$$

$$\text{Zu zeigen:} \quad 8|(3^{2(n+1)} + 7) \qquad (\textbf{Induktionsbehauptung}).$$

Es ist

$$\begin{aligned}
3^{2(n+1)} + 7 &= 3^{2n+2} + 7 \\
&= 3^{2n} \cdot 3^2 + 7 \\
&= (3^{2n} + 7 - 7) \cdot 3^2 + 7 \qquad \text{(Trick: den Term } 3^{2n} + 7 \text{ herstellen)} \\
&= (3^{2n} + 7) \cdot 3^2 - 7 \cdot 3^2 + 7 \\
&= (3^{2n} + 7) \cdot 3^2 - 63 + 7 \\
&= (3^{2n} + 7) \cdot 3^2 - 56
\end{aligned}$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt $8|(3^{2n} + 7)$, sowie $8|56$, also gilt nach 5.8f), daß auch $8|[(3^{2n} + 7) \cdot 3^2 - 56]$, also $8|[3^{2(n+1)} + 7]$, und das war zu zeigen.

c) Sei $a \in \mathbb{N}$ fest gewählt. Wir zeigen:

$$\text{Für alle } n \in \mathbb{N} \text{ ist } (a^2 + a + 1)|(a^{n+1} + (a+1)^{2n-1}).$$

mit vollständiger Induktion (nach $n$) (In der ersten Version von Blatt 10 stand in der Angabe fälschlicherweise „... für alle $n \in \mathbb{N}_0$...“; dies ist jetzt korrgiert.

**Induktionsanfang:** Sei $n = 1$. Dann ist $a^{n+1} + (a+1)^{2n-1} = a^2 + a + 1$ trivialerweise ein Vielfaches von $a^2 + a + 1$. ✓

**Induktionsschluß:** $n \to n+1$: Es sei $n \geq 1$ und es gelte

$$(a^2+a+1)|(a^{n+1}+(a+1)^{2n-1}) \qquad (\textbf{Induktionsvoraussetzung}).$$

$$\text{Zu zeigen:} \quad (a^2 + a + 1)|(a^{n+2} + (a+1)^{2(n+1)-1}) \qquad (\textbf{Induktionsbehauptung}).$$

Es ist

$$\begin{aligned}
a^{n+2} + (a+1)^{2(n+1)-1} &= a \cdot a^{n+1} + (a+1)^{2n+1} \\
&= a \cdot a^{n+1} + (a+1)^{2n-1}(a+1)^2 \\
&= a \cdot a^{n+1} + (a+1)^{2n-1}(a^2+2a+1) \\
&= a \cdot a^{n+1} + a(a+1)^{2n-1} + (a+1)^{2n-1}(a^2+a+1) \\
&= a \cdot \left(a^{n+1} + (a+1)^{2n-1}\right) + (a+1)^{2n-1}(a^2+a+1).
\end{aligned}$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt $(a^2+a+1)|(a^{n+1}+(a+1)^{2n-1})$, und trivialerweise ist auch $(a^2+a+1)|(a^2+a+1)$, also gilt nach 5.8f), daß

$$(a^2+a+1)|[a \cdot (a^{n+1}+(a+1)^{2n-1}) + (a^2+a+1)(a+1)^{2n-1}],$$

also $(a^2+a+1)|(a^{n+2}+(a+1)^{2(n+1)-1})$, und das war zu zeigen.

3. Wir zeigen: Für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ gilt

$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{n}\right).$$

durch vollständige Induktion.

**Induktionsanfang:** Sei $n = 2$. Dann ist

$$\prod_{k=2}^{2} \left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right) = 1 - \frac{2}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3} \qquad \text{sowie auch} \quad \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{2}\right) = \frac{2}{3},$$

so daß die Behauptung stimmt.

**Induktionsschluß:** $n \to n+1$: Es sei $n \geq 2$ und es gelte

$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{n}\right). \qquad (\textbf{Induktionsvoraussetzung})$$

Zu zeigen ist, daß dann auch

$$\prod_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{n+1}\right) \qquad (\textbf{Induktionsbehauptung})$$

gilt. Nun ist

$$\begin{aligned}
&\prod_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right) = \left(\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right)\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{(n+1)(n+2)}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{(n+1)(n+2)}\right) \qquad \text{(Induktionsvoraussetzung anwenden)} \\
&= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{(n+1)(n+2)} - \frac{4}{n(n+1)(n+2)}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2(n+1)(n+2) - 2n - 4}{n(n+1)(n+2)}\right) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2n^2 + 6n + 4 - 2n - 4}{n(n+1)(n+2)}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2n^2 + 4n}{n(n+1)(n+2)}\right) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2n(n+2)}{n(n+1)(n+2)}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{(n+1)}\right),
\end{aligned}$$

was zu zeigen war.

4. Wir zeigen: Ist $M$ eine endliche Menge mit $|M| = n \in \mathbb{N}_0$, so ist $|\mathcal{P}(M)| = 2^n$ durch vollständige Induktion nach $n$.

**Induktionsanfang:** Für $n = 0$ lautet die Behauptung: Ist $|M| = 0$, also $M$ die leere Menge, so ist $|\mathcal{P}(M)| = 2^0 = 1$. Dies ist korrekt, denn es ist $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$ mit genau einem Element.

**Induktionsschluß:** $n \to n+1$**.** Sei $n \geq 0$ und gelte, daß die Potenzmenge einer jeden $n$-elementigen Menge $2^n$ Elemente besitzt. Sei nun $M$ eine Menge mit $|M| = n+1$. Wie im Hinweis vorgeschlagen, fixieren wir ein Element $x \in M$ (dies geht, da $n+1 \geq 1$ ist und $M$ deshalb nicht leer ist!) und machen nun einige Beobachtungen:

a) Es gibt genausoviele Teilmengen von $M$, die $x$ enthalten, wie Teilmengen, die $x$ *nicht enthalten*; formal gesagt: die Teilmengen

$$\mathcal{A} := \{X \in \mathcal{P}(M) \,|\, x \in X\} \subset \mathcal{P}(M) \quad \text{und} \quad \mathcal{B} := \{Y \in \mathcal{P}(M) \,|\, x \notin Y\} \subset \mathcal{P}(M)$$

haben die gleiche Mächtigkeit.

Denn aus einer Teilmenge $X$ des ersten Typs kann man eine Teilmenge $X \cup \{x\}$ des zweiten Typs machen, und aus einer Teilmenge $Y$ des zweiten Typs eine Teilmenge $Y \setminus \{x\}$ des ersten Typs, und beide Vorgänge sind invers zueinander.

Für einen formalen Beweis geben wir zueinander inverse (also bijektive) Abbildungen $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $g : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ an durch die Vorschrift $f(X) := X \cup \{x\}$ und $g(Y) := Y \setminus \{x\}$. Beides sind zulässige Abbildungen, da sie nach Definition Teilmengen des „richtigen“ Typs hervorbringen. Nun gilt aber

$$(g \circ f)(X) = g(f(X)) = g(X \cup \{x\}) = (X \cup \{x\}) \setminus \{x\} = X$$

für alle $X \in \mathcal{A}$ (beachte, daß $x \notin X$ gilt!) sowie

$$(f \circ g)(Y) = f(g(Y)) = f(Y \setminus \{x\}) = (Y \setminus \{x\}) \cup \{x\} = Y$$

für alle $Y \in \mathcal{B}$ (beachte, daß $x \in Y$ gilt). Also ist $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$ und $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$, und damit sind nach 4.18 $f$ und $g$ bijektiv, und das zeigt $|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}|$.

b) Es ist $|\mathcal{P}(M)| = |\mathcal{A}| + |\mathcal{B}|$.

Denn jede Teilmenge von $M$ enthält entweder das Element $x$, oder sie enthält es nicht, d.h. jedes Element von $\mathcal{P}(M)$ liegt *entweder* in $\mathcal{A}$ *oder* in $\mathcal{B}$. Formal bedeutet das $\mathcal{P}(M) = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ und $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \varnothing$, und daraus folgt

$$|\mathcal{P}(M)| = |\mathcal{A} \cup \mathcal{B}| = |\mathcal{A}| + |\mathcal{B}| - |\underbrace{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}}_{=\varnothing}| = |\mathcal{A}| + |\mathcal{B}|\,.$$

c) Es ist $\mathcal{B} = \mathcal{P}(M \setminus \{x\})$ nach Definition, und wegen $|M \setminus \{x\}| = |M| - 1 = n$ folgt nach Induktionsvoraussetzung

$$|\mathcal{B}| = |\mathcal{P}(M \setminus \{x\})| = 2^n.$$

Insgesamt ergibt sich damit

$$|\mathcal{P}(M)| \overset{\text{b)}}{=} |\mathcal{A}| + |\mathcal{B}| \overset{\text{a)}}{=} 2 \cdot |\mathcal{B}| \overset{\text{c)}}{=} 2 \cdot 2^n = 2^{n+1},$$

so daß der Induktionsschluß beendet ist.